

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Э.А.ГАРАЕВА

*Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Бакинский Государственный Университет
mansimov@front.ru*

Рассматривается одна линейная дискретная задача оптимального управления с линейным критерием качества. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Ключевые слова: дискретный принцип максимума, необходимое и достаточное условие оптимальности, линейная задача управления

В работах [1-3] получены необходимые условия оптимальности первого порядка и выведены необходимые условия оптимальности второго порядка в одной дискретной задаче оптимального управления.

В настоящей работе подобная задача исследуется в линейном случае с линейным критерием качества. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума [4-9]. В случае нелинейного, выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности.

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается следующей системой линейных разностных уравнений

$$\begin{aligned} z(t+1, x) &= A(t, x)z(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \\ t &= t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1. \quad (2)$$

Здесь $A(t, x)$ – заданная $(n \times n)$ дискретная матричная функция, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности $t_1 - t_0$ и $x_1 - x_0$ есть натуральные числа, $u(t, x)$ – r -мерная дискретная управляющая вектор-функция со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U , т.е.

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad (3)$$

$f(t, x, u)$ – заданная непрерывная по u , при каждом (t, x) , n -мерная вектор-функция, $y(x)$ – n -мерная начальная вектор-функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} y(x+1) &= B(x)y(x) + g(x, v(x)), \quad x_0, x_0+1, \dots, x_1-1, \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $B(x)$ – заданная $(n \times n)$ дискретная матричная функция, y_0 – заданный постоянный вектор, $g(x, v)$ – заданная r -мерная непрерывная по v при каждом x вектор-функция, а $v(x)$ q -мерная управляющая вектор-функция со значениями из заданного непустого, ограниченного множества $V \subset R^q$, т.е.

$$v(x) \in V \subset R^q, \quad x = x_0, x_0+1, \dots, x_1-1. \quad (5)$$

Пару $(u(t, x), v(x))$ с вышеприведенными условиями назовем допустимым управлением.

На решениях системы (1)-(4) порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим линейный функционал

$$S(u, v) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x)z(t_1, x) + d' y(x_1). \quad (6)$$

Здесь $c(x)$, d заданные n -мерные дискретная и постоянная вектор-функции, соответственно.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (6) при ограничениях (1)-(5).

Допустимое управление $(u^o(t, x), v^o(x))$, доставляющее минимум функционалу (6) при ограничениях (1)-(5), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t, x), v^o(x), z^o(t, x), y^o(x))$ оптимальным процессом.

Формула приращения критерия качества и условие оптимальности. Пусть $(u^o(t, x), v^o(x), z^o(t, x), y^o(x))$ – фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t, x) = u^o(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{v}(x) = v^o(x) + \Delta v(x), \bar{z}(t, x) = z^o(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(x) = y^o(x) + \Delta y(x))$ обозначим произвольный процесс.

Тогда приращение критерия качества (6) можно записать в виде

$$\Delta S(u^o, v^o) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x)\Delta z(t_1, x) + d' \Delta y(x_1). \quad (7)$$

Ясно, что приращение $(\Delta z(t, x), \Delta y(x))$ состояния $(z^o(t, x), y^o(x))$ рассматриваемой системы является решением задачи

$$\Delta z(t+1, x) = A(t, x)\Delta z(t, x) + [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u^o(t, x))], \quad (8)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x), \quad (9)$$

$$\Delta y(x+1) = B(x)\Delta y(x) + [g(x, \bar{v}(x)) - g(x, v^o(x))], \quad (10)$$

$$\Delta y(x_0) = 0. \quad (11)$$

Решения задач (8)-(9) и (10)-(11) допускают, соответственно, следующие представления

$$\Delta z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau; x) [f(\tau, x, \bar{u}(\tau, x)) - f(\tau, x, u^o(\tau, x))] + F(t, t_0 - 1, x) \Delta y(x), \quad (12)$$

$$\Delta y(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \Phi(x, s) [g(s, \bar{v}(s)) - g(s, v^o(s))]. \quad (13)$$

Здесь $F(t, \tau; x)$, $\Phi(x, s)$ ($n \times n$) матричные функции, являющиеся решениями задач

$$\begin{aligned} F(t, \tau - 1; x) &= F(t, \tau; x) A(\tau, x), \\ F(t, t - 1, x) &= E, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, s - 1) &= \Phi(x, s) B(s), \\ \Phi(s, s - 1) &= E, \end{aligned} \quad (15)$$

(E ($n \times n$) единичная матрица).

Из (12), (13) ясно, что

$$\Delta z(t_1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F(t_1, t; x) [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u^o(t, x))] + F(t_1, t_0 - 1, x) \Delta y(x), \quad (16)$$

$$\Delta y(x_1) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Phi(x_1, x) [g(x, \bar{v}(x)) - g(x, v^o(x))]. \quad (17)$$

Принимая во внимание представления (13) в представлении (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta z(t_1, x) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F(t_1, t; x) [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u^o(t, x))] + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F(t_1, t_0 - 1, x) \Phi(x, s) [g(s, \bar{v}(s)) - g(s, v^o(s))]. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая в формуле приращения (7) представления (17) и (18), получим

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x) F(t_1, t; x) [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u^o(t, x))] + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} c'(x) F(t_1, t_0 - 1, x) \Phi(x, s) [g(s, \bar{v}(s)) - g(s, v^o(s))] + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} d' \Phi(x_1, x) [g(x, \bar{v}(x)) - g(x, v^o(x))] = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x) F(t_1, t; x) [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u^o(t, x))] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} d' \Phi(x_1, x) [g(x, \bar{v}(x)) - g(x, v^o(x))] + \\
& + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x+1}^{x_1-1} c'(s) F(t_1, t_0 - 1, s) \Phi(s, x) [g(x, \bar{v}(x)) - g(x, v^o(x))] = \\
& = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x) F(t_1, t; x) [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u^o(t, x))] + \\
& + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[d' \Phi(x_1, x) + \sum_{s=x+1}^{x_1-1} c'(s) F(t_1, t_0 - 1, s) \Phi(s, x) \right] [g(x, \bar{v}(x)) - g(x, v^o(x))].
\end{aligned} \tag{19}$$

Положим

$$p^o(t, x) = -F'(t_1, t; x)c(x), \tag{20}$$

$$q^o(x) = - \left[\Phi'(x_1, x)d + \sum_{s=x+1}^{x_1-1} \Phi'(s, x)F'(t_1, t_0 - 1, s)c(s) \right], \tag{21}$$

$$H(t, x, u, p^o) = p^o f(t, x, u),$$

$$M(x, v, q^o) = q^o g(x, v).$$

Тогда формула (19) для приращения критерия качества принимает вид

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^o, v^o) & = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{u}(t, x), p^o(t, x)) - H(t, x, u^o(t, x), p^o(t, x))] - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [g(x, \bar{v}(x), q^o(x)) - g(x, v^o(x), q^o(x))].
\end{aligned} \tag{22}$$

Используя (20), (21) получим уравнения для определения $p^o(t, x)$, $q^o(x)$.

С учетом (14), (15) из (20), (21) получаем, что

$$p^o(t-1, x) = -A'(t, x)F'(t_1, t-1; x)c(x) = A'(t, x)p^o(t, x),$$

$$p^o(t_1 - 1, x) = -c(x).$$

Далее

$$\begin{aligned}
q^o(x-1) & = - \left[\Phi'(x_1, x-1)d + \sum_{s=x}^{x_1-1} \Phi'(s, x-1)F'(t_1, t_0 - 1, s)c(s) \right] = \\
& = - \left[B'(x)\Phi'(x_1, x)d + \Phi'(x, x-1)F'(t_1, t_0 - 1, x)c(x) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{s=x+1}^{x_1-1} \Phi'(s, x-1)F'(t_1, t_0 - 1, s)c(s) \right] =
\end{aligned}$$

$$= - \left[B'(x)\Phi'(x_1, x)d + \sum_{s=x+1}^{x_1-1} B'(x)\Phi'(s, x)F'(t_1, t_0 - 1, s)c(s) + F'(t_1, t_0 - 1, x)c(x) \right] =$$

$$= B'(x)q(x) - F'(t_1, t_0 - 1, x)c(x) = B'(x)q(x) + p^\circ(t_0 - 1, x).$$

Наконец,

$$q^\circ(x_1 - 1) = -d.$$

Таким образом, доказали, что $p^\circ(t, x)$ и $q^\circ(x)$ определяемые формулами (20), (21) являются решениями, соответственно, следующих задач

$$p^\circ(t - 1, x) = A'(t, x)p^\circ(t, x), \quad (23)$$

$$p^\circ(t_1 - 1, x) = -c(x), \quad (24)$$

$$q^\circ(x - 1) = B'(x)q^\circ(x) - p^\circ(t_0 - 1, x), \quad (25)$$

$$q^\circ(x_1 - 1) = -d. \quad (26)$$

Систему уравнений (23)-(26) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче оптимального управления.

Имеет место

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(x))$ в задаче (1)-(6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$H(\theta, \xi, u^\circ(\theta, \xi), p^\circ(\theta, \xi)) = \max_{u \in U} H(\theta, \xi, u, p^\circ(\theta, \xi)),$$

для всех $(\theta, \xi) \in T \times X$ ($T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$; $X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}$), (27)

$$M(\xi, v^\circ(\xi), p^\circ(\xi)) = \max_{v \in V} M(\xi, v, p^\circ(\xi)) \text{ для всех } \xi \in X. \quad (28)$$

Теорема 1 представляет собой аналог дискретного условия максимума и доказывается по схеме аналогичной из [7].

4. Достаточное условие оптимальности. Предположим, что требуется минимизировать нелинейный функционал

$$S(u, v) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_1(x, z(t_1, x)) + \varphi_2(y(x_1)) \quad (29)$$

при ограничениях (1)-(4).

Здесь $\varphi_1(x, z)$ заданная скалярная выпуклая и непрерывно дифференцируемая по z при всех x скалярная функция, $\varphi_2(y)$ – заданная непрерывно дифференцируемая и выпуклая скалярная функция.

Используя формулу Тейлора приращение функционала (29), соответствующее допустимым процессам $(u^\circ(t, x), v^\circ(x), y^\circ(x), z^\circ(t, x))$ и $(\bar{u}(t, x) = u^\circ(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{v}(x) = v^\circ(x) + \Delta v(x), \bar{y}(x) = y^\circ(x) + \Delta y(x), \bar{z}(t, x) = z^\circ(t, x) + \Delta z(t, x))$, записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) = & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_1'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \frac{\partial \varphi_2'(y(x_1))}{\partial y} \Delta y(x_1) + \\ & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|) + o_2(\|\Delta y(x_1)\|). \end{aligned} \quad (30)$$

Введем функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x, u, p^o) = p^o f(t, x, u),$$

$$M(x, v, q^o) = p^o g(x, v),$$

где $p = p^o(t, x)$ и $q = q^o(x)$ являются решениями, соответственно, следующих задач

$$p^o(t-1, x) = A'(t, x) p^o(t, x), \quad (31)$$

$$p^o(t_1-1, x) = -\frac{\partial \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z},$$

$$q^o(x-1) = B'(x) q^o(x) + p^o(t_1-1, x), \quad (32)$$

$$q^o(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_2(y^o(x_1))}{\partial y}.$$

С учетом введенных обозначений и сопряженную систему (31), (32) по схеме аналогичной схеме из п3, формула приращения (30) функционала (29) представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) = & -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{u}(t, x), p^o(t, x)) - H(t, x, u^o(t, x), p^o(t, x))] - \\ & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, \bar{v}(x), q^o(x)) - M(x, v^o(x), q^o(x))] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|) + o_2(\|\Delta y(x_1)\|). \end{aligned} \quad (33)$$

В силу выпуклости функций $\varphi_1(x, z)$, $\varphi_2(y)$ ясно, что $o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|)$, $o_2(\|\Delta y(x_1)\|) \geq 0$.

При помощи формулы приращения (33) доказывается

Теорема 2. Если скалярные функции $\varphi_1(x, z)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывно дифференцируемы и выпуклы по z и y соответственно, то для оптимальности допустимого управления $(u^o(t, x), v^o(x))$ в задаче (1)-(5), (29) достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$H(t, x, u^o(t, x), p^o(t, x)) = \max_{u \in U} H(t, x, u, p^o(t, x))$$

для всех $(t, x) \in T \times X$,

$$M(x, v^o(x), q^o(x)) = \max_{v \in V} M(x, v, q^o(x))$$

для всех $x \in X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук, 2014, № 1, с.
2. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной дискретной задаче оптимального управления // В сб.: Актуальные проблемы математики и механики. Мат-лы Международной конференции, посвященной 55 летию ИМиМ НАН Азербайджана. с. 236-238.
3. Э.А. Гараева, К.Б. Мансимов. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядка для одного класса дискретных задач оптимального управления // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 2015, № 3, с. 92-99.
4. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973, 275 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М. Наука, 1971, 576 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн. 1974, 272 с.
7. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 191 с.
8. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 176 с.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981, 401 с.

BİR DİSKRET XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

E.A.QARAYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə bir sinif xətti optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Pontryaginın maksimum prinsipi formasında optimallıq üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır. Funksionalın qeyri-xətti olduğu bir halda optimallıq üçün kafi şərt isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: xətti diskret optimal idarəetmə məsələsi, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt, diskret maksimum şərti

ON ONE LINEAR DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

E.A.GARAYEVA

SUMMARY

The paper considers one linear optimal control problem. Necessary and sufficient conditions for optimality in the form of Pontryagin's maximum principle are obtained. The sufficient condition of optimality is proved for the nonlinear functional.

Key words: linear discrete optimal control problem, necessary and sufficient conditions for optimality, discrete maximum condition.

Поступила в редакцию: 06.11.2015 г.

Подписано к печати: 12.02.2016 г.